フィルタリングと変分法を用いたKyleモデルの分析

西出, 勝正

西出, 勝正. フィルタリングと変分法を用いたKyleモデルの分析. 調査と研究 : 経済論叢別冊 2003, 27: 53-58

2003-10

https://doi.org/10.14989/44564

経済論叢別冊　調査と研究（京都大学）第27号，2003年10月

〈金融工学のフロンティア〉

フィルタリングと変分法を用いたKyleモデルの分析*

西　出　勝　正

I　序

従来の金融工学・金融経済学では完全情報と合理的経済主体の仮定を置いた上で証券価格の形成過程やその性質について議論してきた。完全市場の仮定の下では，市場参加者が均一的に保有する入手可能な情報が全て証券価格に織り込まれる。また，強い意味での市場効率性の下では（中心極限定理によって）価格は幾何Brown運動に従い，この場合，CAPMのβ，即ち市場ポートフォリオの収益率との共分散によって証券の収益率・リスクを把握することが可能となる。しかしながら，現実の金融市場においてはいわゆる情報の非対称性が存在し，完全情報は非常に強い仮定，また場合によっては間違った結果を生じる仮定であることは広く認められているところである。例えば，証券コンサルタントや経済評論家の存在は情報の非対称性の存在を裏付けるものであるということができよう。また，学術的にもFama［1991］などによって証券市場が市場効率的であるという仮説は否定されている。したがって，情報の非対称性を織り込んだモデルの構築が今後の金融工学・金融経済学の課題であると言えよう。

情報の非対称性をモデル化した代表的なものとしてはKyle［1985］がある。Kyle［1985］では1人の独占的情報トレーダーと流動トレーダー，及びマーケットメーカーが市場を形成し，情報トレーダーが持つ私的情報が価格にどのように織り込まれていくかを考察している。Kyle［1985］で得られた特に重要な結果として，Kyleのλと呼ばれる，注文量に対する価格感応度が連続時間の場合には時間を通して一定であるという点が挙げられる。即ち，均衡においては，価格を設定する役割を担うマーケットメーカーにとって，各時点の注文量の持つ情報の質が不変であるということを示している。

Kyle［1985］以降，このモデルの様々な拡張・一般化が行われてきた。その中でBack and Pedersen［1998］では情報トレーダーの観察する私的情報が時間とともに変化する，逆の見方をすると不完全な私的情報を観察する独占的情報トレーダーの仮定と，流動トレーダーの不確実性（瞬間的な注文量の標準偏差を表す拡散係数）が変化するとの仮定の下での市場均衡の性質を考察している。そして，KyleのλはKyle［1985］と同様に一定値を取ることが証明されている。即ち，私的情報の不確実性と情報取引の非定常性をモデルの中に導入したとしても結果に大きな影響を与えないということが分かる。

Back and Pedersen［1998］のモデルはKyle［1985］に対する拡張としてはモデルの現実性を勘案すると学問的意義のあるものと言えよう。但し，ここで検討する必要があるのは，彼らが均衡解の導出に当たって，複雑なBellman方程式を導出し，それを基に偏微分方程式を解くという方法を採用しているという点である。この方法は解の導出方法自身のみならず，モデルの構造や解の性質を考察する際にも直感的理解が容易であるとは言い難い。また，解の導出に当たって変数の正規化を行っているため，元々の変数と得られた均衡解と関係が不明確なものとなってしまう。さらに，情報トレーダー

*　本稿は西出［2003］第2節に加筆修正を加えたものである。本稿作成に当たり，指導教官である木島正明教授には日頃の暖かいご指導とともに貴重なコメントを頂戴した。ここに謝意を表したい。もちろん，本稿における全ての誤りは著者に帰する。

を複数人に拡張した Back et al. [2000] でも均衡解の導出に同様の手法が採られているが，そこではさらに複雑な手続きを踏まざるを得ず，これがモデル構造の理解を妨げているということが言えよう。

そこで，本論では Back and Pedersen [1998] と同じモデルを考えるが，その均衡解導出に際して，フィルタリングおよび変分法という手法を採用する。フィルタリングとは，ある確率過程に対してノイズ付きの不完全な情報しか観察できない場合に，この不完全な情報を基に真の確率過程を推定する際に用いる手法であり，宇宙工学などにおける推定問題など，様々な分野で用いられているものである。Back and Pederson [1998] でも一部フィルタリングの議論を用いて証明を行っているが，本論ではより直接的な形で適用することにより，議論を明確にするとともに証明を簡素にする。具体的には，マーケットメーカーが流動トレーダーの注文というノイズの入った市場全体の注文量に対して，情報トレーダーがもっている私的情報を推定しようという問題に用いられる。一方，変分法とはある制御変数を用いて汎関数の最適化を行う問題であり，解析力学や最適制御で頻繁に用いられる手法である。これを情報トレーダーの利潤最大化問題に応用する。利潤最大化問題に変分法を用いることによって，均衡解の導出が1つの常微分方程式（Euler 方程式）に集約され，解の導出とモデルの構造把握が容易になるという利点があるだけでなく，Back et al. [2000] など，情報トレーダーが複数人いる場合のモデル拡張にも適用可能になる。即ち，簡素かつ拡張性の高い手法であることが分かる[1)]。

再掲するが，フィルタリングと変分法を用いた証明方法が以下の点で優れていることを強調したい。即ち，

1） 証明の手順が Back and Pedersen [1998] や Back et al. [2000] に比して非常に簡素化すること，
2） 変数の正規化等の必要がないため，モデルの元々のパラメータでの分析が可能となること，
3） 手法そのものが確率過程の推定問題や汎関数最適化に良く用いられている方法であり，馴染みがあること，
4） 以上の理由から，モデルの構造を直感的に把握することが可能となり，均衡解の性質やその起因を理解することが容易となること，

という点が利点であり，本論の貢献であると言える。尚，当然のことながら，モデルの結果そのものは Back and Pedersen [1998] と変わらないものである。

本論の構成は以下の通りである。まず，第Ⅱ節でモデルの概要・仮定を述べる。その上で，第Ⅲ節でフィルタリングと変分法を用いて均衡解を導出し，その性質について議論する。最後に第Ⅳ節で結論を述べる。

Ⅱ モデル

Kyle [1985] や Back and Pedersen [1998] と同様の連続時間証券市場モデルを考える。この証券市場では1種類の証券（危険資産）が取引されている。取引時点は $t \in [0, 1]$ で連続的に行われる。時点1の取引終了直後に証券の利得 $V(1)$ が実現し，全ての証券が清算される。この証券の清算価値 $V(t)$ については以下の仮定を置く。即ち，時点0では平均 $P(0)$，分散 Σ_0 の正規分布に従い，時点 $t \in [0, 1]$ では以下の拡散過程に従う。

$$dV(t) = \gamma(t)dW(t) \tag{1}$$

ここで，$\gamma(t)$ はある既知の非負確定関数とし，十分に滑らか（必要な回数だけ微分可能）とする。また，$\{W(t)\}$ は標準ブラウン運動（ウィーナー過程）とする。したがって，以下のように書き換えることも可能である：

1） 本論で用いたフィルタリングと変分法を用いた証明方法の Back et al. [2000] への適用については西出 [2003] を参照されたい。

$$V(t)=V(0)+\int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}W(s) \tag{1'}$$

$\gamma(t)$ は時点 t において価格がどれくらい変化する可能性があるかという変動性を表す指標と見ることができる。季節性商品を取り扱う企業，例えばスキー用具製造業者を考えると，秋から冬に掛けては取扱商品の売り上げが業績を大きく左右する一方，夏場には売り上げがほとんどなく，企業業績に与える影響は少ない。関数 $\gamma(t)$ を取り入れることによってこのような現象をモデルに組み込むことが可能となる。

市場には3種類の市場参加者が存在する。独占的情報トレーダー・流動トレーダー・およびマーケットメーカーである。それぞれについて，以下で説明する。

独占的情報トレーダーは時点 t において他の市場参加者が知ることのできない流動価値 $V(t)$ を観察することができる。この観察した $V(t)$ を基に情報トレーダーは時点 t から $t+\mathrm{d}t$ において以下の線形取引戦略に基づいてマーケットメーカーに売買注文 $\mathrm{d}X(t)$ を行う：

$$\mathrm{d}X(t)=\beta(t)(V(t)-P(t))\mathrm{d}t \tag{2}$$

ここで，$P(t)$ は時点 t においてマーケットメーカーが設定する市場取引価格である。また，$\beta(t)$ は情報トレーダーの戦略変数で t についての確定関数とする。

流動トレーダーは流動性制約や政治的理由などの外生的要因によって市場に参加している。彼らの累積注文量 $Z(t)$ は以下の拡散過程に従う：

$$\mathrm{d}Z(t)=\sigma(t)\mathrm{d}U(t) \tag{3}$$

但し，$\sigma(t)$ は厳密に正の値を取る既知の確定関数で十分に滑らかと仮定する。また，$\{U(t)\}$ は標準ブラウン運動で他の全ての確率変数と独立とする。$\sigma(t)$ は時点 t において流動取引がどの程度不確実であるかという変動性を表す指標と見ることができる。現実に観測される市場においては，例えば期末の取引需要など，時期によって外生的取引が増加する現象が見られる。関数 $\sigma(t)$ を取り入れることによってこのような現象をモデルに組み込むことが可能となる。

最後に，マーケットメーカーについて触れる。マーケットメーカーは市場価格 $P(t)$ を設定するとともに，情報トレーダー・流動トレーダーからの売買注文に応じて市場を成立させる。マーケットメーカーは自らへの注文が情報トレーダーからのものか，あるいは流動トレーダーからのものかを区別することができない。いま，市場全体の累積注文量を $Y(t)=X(t)+Z(t)$ とする。このとき，マーケットメーカーは以下の線形価格戦略によって取引価格 $P(t)$ を更新する：

$$\mathrm{d}P(t)=\lambda(t)\mathrm{d}Y(t) \tag{4}$$

但し，$\lambda(t)$ はマーケットメーカーの戦略変数であり，t についての確定関数とする。

各市場参加者の戦略が明らかになったところで，市場均衡を定義する。

定義 1　市場均衡とは以下の2つの条件を満足するような関数の組 $(\beta(t),\lambda(t))$ を言う。

1. 利潤最大化：$\beta(t)$ は以下の情報トレーダーの期待利潤を最大化している：

$$\mathrm{E}\left[\int_0^1 (V(1)-P(t))\mathrm{d}X(t)\right] \tag{5}$$

2. 市場効率性：$\lambda(t)$ は価格が流動価値 $V(t)$ の条件付期待値となるように設定されている：

$$P(t)=\mathrm{E}\left[V(t)\middle|\{Y(s)\}_{s\le t}\right] \tag{6}$$

ここで，$\beta(t)$ と $\lambda(t)$ について若干の言及をしておく。$\beta(t)$ は情報トレーダーの戦略変数である。いま，例えば $\beta(t)$ を大きく取ると(2)式より時点 t での瞬間的利潤は大きくなる。しかしながら，モデルの構造から分かるようにあまりに大きな $\beta(t)$ を取るとマーケットメーカーに対して清算価値 $V(t)$ についてのより正確な情報を与えてしまうことになり，その後の

取引で得られる利潤が減少する可能性がある。したがって，現時点での瞬間的利潤と将来時点での期待利潤とのトレードオフの中で最適な $\beta(t)$ を選択することになる。一方，$\lambda(t)$ は（4）式から分かるように市場全体の注文量1単位に対してどれだけ価格が変化するかを表す指標である。この値が小さければ小さいほど市場には厚みがあると言われ，流動性が高い市場という理解が可能である。

以上でモデルの説明が終わった。次節で解の導出を行う。

III　解の導出

最初にマーケットメーカーの推定問題（6）を考える。前節のモデル・仮定によってマーケットメーカーの推定問題（6）は以下のフィルタリング問題に帰着される：

$$\text{状態変数：} dV(t)=\gamma(t)dW(t) \tag{1}$$

$$\text{観察変数：} dP(t)=\lambda(t)\beta(t)V(t)dt - \lambda(t)\beta(t)P(t)dt + \lambda(t)\sigma(t)dU(t) \tag{7}$$

（7）は（4）に（2）と（3）を代入することで容易に得られる。ここで，$M(t)=\mathrm{E}\left[V(t)|\{Y(s)\}_{s\le t}\right]$ および $\Sigma(t)=\mathrm{Var}\left[V(t)|\{Y(s)\}_{s\le t}\right]$ と定義すると，明らかに

$$M(t)=\mathrm{E}\left[V(t)|\{P(s)\}_{s\le t}\right] \tag{8}$$

$$\Sigma(t)=\mathrm{Var}\left[V(t)|\{P(s)\}_{s\le t}\right] \tag{9}$$

である。したがって，フィルタリングに関する良く知られた定理を用いて以下の結果を得ることができる。

補題1　（1）と（7）の系の下では条件付期待値 $M(t)$ および条件付分散 $\Sigma(t)$ は以下を満足する：

$$dM(t)=\frac{\beta(t)\Sigma(t)}{\lambda(t)\sigma(t)^2}dP(t) \tag{10}$$

$$\dot{\Sigma}(t)=\gamma(t)^2-\frac{\beta(t)^2\Sigma(t)^2}{\sigma(t)^2} \tag{11}$$

証明　Liptser and Shiryaev [2000] の定理10.3を見よ。

均衡では，$M(t)=P(t)$ であるから（10）式によって

$$\lambda(t)=\frac{\beta(t)\Sigma(t)}{\sigma(t)^2} \tag{12}$$

が成立している。

次に情報トレーダーの利潤最大化問題を考える。（11）式から，均衡では $\beta(t)$ の代わりに $\Sigma(t)$ を情報トレーダーの操作変数と考えることが可能になる。（11）式を変形すると

$$\beta(t)\Sigma(t)=\sigma(t)\sqrt{\gamma(t)^2-\dot{\Sigma}(t)} \tag{13}$$

を得ることができる。一方，情報トレーダーの期待利潤（5）式は条件付期待値の連鎖律等を用いることで

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\int_0^1(V(1)-P(t))dX(t)\right]= \\
&\mathrm{E}\left[\int_0^1(V(1)-P(t))\beta(t)(V(t)-P(t))dt\right] \\
&=\mathrm{E}\left[\int_0^1\beta(t)\mathrm{E}[V(1)-P(t))(V(t)-P(t))|\{Y(s)\}_{s\le t}]dt\right] \\
&=\int_0^1\beta(t)\Sigma(t)dt
\end{aligned} \tag{14}$$

と書き換えることができる。但し，2つ目の等号で $\Sigma(t)=\mathrm{E}\left[(V(t)-P(t))^2|\{Y(s)\}_{s\le t}\right]$ を用いた，（14）式に（13）式を代入すると，情報トレーダーの最適化問題が以下のように再定式化される[2)]：

$$\max_{\{\Sigma(t)\}}\int_0^1\sigma(t)\sqrt{\gamma(t)^2-\dot{\Sigma}(t)dt} \tag{15}$$

$$\text{subject to } \Sigma(0)=\Sigma_0 \qquad \Sigma(1)=0$$

これは $t=0, 1$ が固定された $\Sigma(t)$ についての汎関数最適化問題であり，まさに変分法が適用できる構造となっている。変分法の解法を用いれば以下の定理を得る。

2）（15）式から，情報トレーダーが最適行動を取る場合には $\lim_{t\to 1}\Sigma(t)=0$ となることが容易に確認できる。より厳密な証明は Back and Pedersen [1998] を参照。

定理 1 均衡では $\beta(t)$ と $\lambda(t)$ はそれぞれ以下で与えられる：

$$\beta(t)=\frac{\sqrt{\dfrac{\Sigma_0+\int_0^1\gamma(s)^2\mathrm{d}s}{\int_0^1\sigma(s)^2\mathrm{d}s}\sigma(t)^2}}{\Sigma_0-\dfrac{\Sigma_0+\int_0^1\gamma(s)^2\mathrm{d}s}{\int_0^1\sigma(s)^2\mathrm{d}s}\int_0^t\sigma(s)^2\mathrm{d}s+\int_0^t\gamma(s)^2\mathrm{d}s} \tag{16}$$

$$\lambda(t)=\sqrt{\frac{\Sigma_0+\int_0^1\gamma(s)^2\mathrm{d}s}{\int_0^1\sigma(s)^2\mathrm{d}s}} \tag{17}$$

証明　変分法の手続きをそのまま適用する，F を(15)式の被積分関数とする：

$$F\left(t,\Sigma(t),\dot{\Sigma}(t)\right):=\sigma(t)\sqrt{\gamma(t)^2-\dot{\Sigma}(t)} \tag{18}$$

このとき，最適化のための1階条件（Euler方程式）は以下のようになる：

$$F_\Sigma-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{\Sigma}}=\frac{2\dot{\sigma}(t)\left[\gamma(t)-\dot{\Sigma}(t)\right]-\sigma(t)\left[2\gamma(t)\dot{\gamma}(t)-\ddot{\Sigma}(t)\right]}{4\left[\gamma(t)^2-\dot{\Sigma}(t)\right]^{\frac{3}{2}}}=0 \tag{19}$$

(19)式を整理すると，$\dot{\Sigma}(t)$ についての以下の1階の常微分方程式を得ることができる：

$$\ddot{\Sigma}(t)-\frac{2\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)}\dot{\Sigma}(t)+\frac{2\gamma(t)^2\dot{\sigma}(t)-2\gamma(t)\dot{\gamma}(t)\sigma(t)}{\sigma(t)}=0 \tag{20}$$

上記の常微分方程式は定数変化法という方法を用いれば簡単に解くことができる（例えば，吉田［1978］などを参照)。$\Sigma(t)$ についての境界条件を考慮して(20)を解くと

$$\Sigma(t)=\Sigma_0-\frac{\Sigma_0+\int_0^1\gamma(s)^2\mathrm{d}s}{\int_0^1\sigma(s)^2\mathrm{d}s}\int_0^1\sigma(s)^2\mathrm{d}s+\int_0^1\gamma(s)^2\mathrm{d}s \tag{21}$$

を得ることができる。(21)式を(13)式に代入すれば(16)の $\beta(t)$ を得ることができる。また，この $\beta(t)$ と(21)を(12)に代入すれば求める $\lambda(t)$ が得られる。

注意 1　均衡における $\lambda(t)$ は定数であり，以下のように表すこともできる。

$$\lambda(t)=\sqrt{\frac{\mathrm{Var}[V(1)]}{\mathrm{Var}[Z(1)]}} \tag{22}$$

前述したように，情報トレーダーは現時点での瞬間的利潤と将来の期待利潤のトレードオフの中で $\beta(t)$ を決定する。均衡において $\lambda(t)$ が定数になるということは，各時点において注文量に対する価格感応度が一定ということである。これは，情報トレーダーが1人で私的情報を独占的に利用できる場合には，マーケットメーカーにとって各時点の注文量の持つ情報の質が一定に保たれるように情報トレーダーが $\beta(t)$ を決定することが均衡では最適であることを示している。また，均衡における価格変化の感応度は各時点の不確実性に依存するのではなく，取引時点全体を通じた不確実性のみに依存することが分かる。尚，情報トレーダーが複数人いる場合には $\lambda(t)$ は一定値を取らず，例えば清算価値が一定の場合 $(\gamma(t)\equiv 0)$ には時間に関して U-字型の形状を持つことが Back el al.［2000］や西出［2003］で示されている。

IV　結果についての考察と結び

Back and Pedersen［1998］における証明の流れは基本的には Back［1992］と同様である。即ち，概略だけを述べると

1. 清算価値 $V(t)$ についてある種の正規化を行う。
2. 予め，情報トレーダーの取引戦略とマーケットメーカーの価格戦略を(16)，(17)のように推定する。
3. 均衡における清算価値正規化後の拡散係数の差について

$$\int_t^1\left[\sigma(s)^2-\gamma(s)^2\right]\mathrm{d}s>0$$

を示す。

4．正規化後の清算価値 $V(t)$ の条件付分布が

$$V(t)|_{\{Y(s)\}_{s\le t}} \sim N\left(Y(t), \int_t^1 [\sigma(s)^2-\gamma(s)^2]\mathrm{d}s\right)$$

であることを示す。

5．情報トレーダーの Bellman 方程式を導出し，均衡で成立している偏微分方程式を得る。

6．(16)が Bellman 方程式を満たしていることを示す。

7．(17)が $V(t)$ についての条件付分布を満たすように設定されていることを示す。

となっている。

上記証明の完了には，ある種の収束条件の確認や不等式の証明など様々な補足的手続きが必要でこれが彼らの証明の直感的理解を困難にしている大きな要因である。一方，本論で用いられている手法は変分法という汎関数最適化には非常に頻繁に用いられてなじみのあるものであり，その理解も容易で証明手続きも簡素である[3)]。

このように，(1)マーケットメーカーの推定問題に関してフィルタリングの議論をより直接的に用いる，(2)情報トレーダーの最適化問題を変分法によって求める，という手法は Kyle モデルの分析に非常に有効であり，モデルの構造を理解するに当たって有益であることが分かる。また，この証明手続きは Back et al. [2000] のような複数人の情報トレーダーが存在する市場モデルの分析においても適用が可能である。これについては西出 [2003] を参照されたい。

参考文献

西出勝正 [2003] “Continuous Auctions When the Liquidation Value Varies Stochastically,” 京都大学大学院経済学研究科修士論文。

吉田耕作 [1978]『微分方程式の解法 第2版』岩波書店。

Back, K. [1992] “Insider Trading in Continuous Time,” *Review of Financial Studies,* 5, pp.387-409.

Back, K. and H. Pedersen [1998] “Long-lived Information and Intraday Pattern,” *Journal of Financial Studies,* 1, pp.385-402.

Back, K., H. Cao, and G. Willard [2000] “Imperfect Competition among Informed Traders,” *Journal of Finance,* 55, pp.2117-2155.

Fama, E. [1991] “Efficient Capital Markets: II,” *Journal of Finance,* 45, pp.1575-1617.

Kyle, A.S. [1985] “Continuous Auctions and Insider Trading,” *Economerica,* 53, pp.1315-1335.

Liptser, R.S. and A.N. Shiryaev [2000] *Statistics of Random Processes I,* 2nd ed., Springer.

3) 但し，本稿においても $\lim_{t\to 1}\Sigma(t)=0$ を示すのには彼らと同じ手続きを踏まなければならない。また，$\Sigma(t)\ge 0$ の成立についての確認を必要とする（もちろん，本モデルではこの不等式は成立している）。